SERIE: Testo "adottato"

-1-

Come nasce 1 serie?

Al 1° tratto, beviamo 1/2 bottiglina d'acqua.

Al 2° tratto, di quello che rimane, ne beviamo la metà.
Quanto abbiamo bevuto? $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.
Ci resta $\frac{1}{4}$.
Al 3° tratto, beviamo ancora la metà.
Abbiamo bevuto $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.
Ci resta $\frac{1}{8}$.

Consumiamo

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

Per logica, non andiamo a prendere un'altra bottiglia, e ci aspettiamo che questa somma sia <u>finita</u>, pur essendoci infiniti addendi. → IL RISULTATO È UN VALORE FINITO.

Abbiamo detto che non prendiamo un'altra bottiglia, quindi $S = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots \leq 1$

Perché è 1? Se fosse $1-\varepsilon$, $\varepsilon>0$, esiste un'n-sima bevuta con la quale lo superiamo

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ $\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ $\quad \frac{15}{16}$ $\quad \frac{31}{32}$

Tendiamo a finire TUTTA la bottiglia, cioè la somma è 1. 1 è il limite di $\frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \dots, \frac{1023}{1024}, \dots$ Quindi 1 è il limite delle somme $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$

e si dice che è il limite delle somme parziali

Successione di partenza		Successione delle somme parziali
1	$a_1 = 1/2$	$S_1 = 1/2$
2	$a_2 = 1/4$	$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
3	$a_3 = 1/8$	$S_3 = a_1+a_2+a_3 = S_2 + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ $\quad S_3 = S_2 + a_3$
4	$a_4 = 1/16$	$S_4 = S_3 + a_4 = \frac{7}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

1 sarà il $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n}$ In generale,

"una serie è il limite della successione delle somme parziali"

Def.: Data una successione di partenza $(a_n)_n$, si chiama **SERIE** associata alla $(a_n)_n$ la successione $(S_n)_n$ delle somme parziali così definite

$$S_1 = a_1 \quad S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$

$$S_3 = S_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\boxed{S_n = S_{n-1} + a_n} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

FORMULA DI RICORRENZA

Sia ora $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$:

se S è un numero reale (finito), si dice che **LA SERIE CONVERGE ad S**

Se $S = +\infty$ oppure $-\infty$, si dice che **LA SERIE DIVERGE a $+\infty$ oppure a $-\infty$**

Se S non esiste, allora si dice che la serie è **INDETERMINATA** oppure **OSCILLANTE.**

La serie, la si indica con il simbolo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ oppure $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ACHILLE E LA TARTARUGA

Achille viaggia alla velocità di 10 m/s
La tartaruga, a 1 m/s
La tartaruga parte con 10 m di vantaggio su Achille.

	A	T	
	0 m	10 m	t_0 tempo di partenza
t_1 dopo 1 secondo	$\boxed{10\ m}$	$10\ m + 1\ m = \boxed{11\ m}$	
t_2 dopo 1/10 di secondo	$10 + 1\ m$ $\boxed{11\ m}$	$11\ m + \frac{1}{10}\ m$ $\boxed{11 + 1/10}$	

Rimarrà sempre (??!??) un vantaggio della tartaruga, p. es. dopo $\frac{1}{100}$ di secondo sarà $\frac{1}{100}$ di m il vantaggio della tartaruga su Achille, etc ----

Allora Achille non raggiungerà mai la tartaruga??

La raggiunge molto presto.

L'equazione del moto di Achille (supposto **rettilineo uniforme**) è $y = mx + q$

$m = 10$ (velocità di Achille = coefficiente angolare)

$y(0) = 0$ Achille parte da 0 $\boxed{0 = 10 \cdot 0 + q}$ $\boxed{q = 0}$

$\boxed{y = 10x}$ è l'equazione di Achille

Tartaruga: $\boxed{y = mx + q}$ $m = 1$ velocità 1 m/s

La tartaruga parte da 10, quindi $q = 10$

$y(0) = 10$

$\boxed{q = 10}$ L'equazione della tartaruga è $\boxed{y = x + 10}$. ACHILLE RAGGIUNGE LA TARTARUGA nell' ~~ist~~ istante x tale che la y di Achille è UGUALE ~~alla~~ y della tartaruga, cioè $\boxed{10x = x + 10}$ $9x = 10$ $\boxed{x = \frac{10}{9}}$

Dopo $\frac{10}{9}$ di secondo, Achille raggiunge la tartaruga (!!!!) Questo $\frac{10}{9}$ è proprio il valore della somma

$$S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots\cdots \qquad 1 = \frac{1}{10^0}$$

$$= 1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$ Perchè è $\frac{10}{9}$?

Questa somma è del tipo $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n}$, ove $q = \frac{1}{10}$

SERIE GEOMETRICA

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$ L'n-simo termine delle somme parziali è $S_n = 1+q+\ldots+q^n$ $S_0=1$ $a_0=1$
$a_1=q$ $a_2=q^2$ $a_n=q^n$ $S_1=1+q=S_0+a_1$
$S_1=S_0+a_1=a_0+a_1=1+q$ $S_2=S_1+a_2=a_0+a_1+a_2=$
$=1+q+q^2$ $S_3=S_2+a_3=a_0+a_1+a_2+a_3=1+q+q^2+q^3$

$\boxed{S_n = 1+q+\ldots+q^n \underset{\text{trucco}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ (con $q\neq 1$). Infatti si ha:

$(1-q)\cdot(1+q+\ldots+q^n) = 1+\cancel{q}+\cancel{q^2}+\ldots+q^n-\cancel{q}-\cancel{q^2}-\ldots-q^n-q^{n+1}$

$(1-q)\cdot(1+q+\ldots+q^n) = 1-q^{n+1}$. Se $-1<q<1$, si ha

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\overset{\nearrow 0}{q^{n+1}}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \underset{\text{(nel caso } q=\frac{1}{10})}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} =$

$= \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}$ (N.B.: Ricordiamo che, per $-1<q<1$, si ha $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$. Per esempio, per $q=\frac{1}{10}$,

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} 10^{n+1}} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0$ per l'algebra dei limiti)

MATE-MAGICA (!!!)

Questo vuol dire che, se $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$ è la serie di partenza, la **somma** della serie è $\frac{10}{9}$

cioè $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{10}{9}$ La serie converge a $\frac{10}{9}$

Viene $\frac{10}{9}$ perché n parte da 0.

$$\overset{a_0}{1} + \overset{a_1}{q} + q^2 + \dots + q^n \dots\dots$$

Se n parte da 1, bisogna **togliere** il termine a_0, cioè la somma viene $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} - 1$

$(q = 1/10)$ $\frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$

Se n parte da 2, allora la somma viene (tolgo a_0 ed a_1)

$$\sum_{n=2}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} - 1 - q = \quad (q = 1/10)$$

$$\frac{10}{9} - 1 - \frac{1}{10} = \frac{100-90-9}{90} = \frac{1}{90}$$

Prova: $\frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{10-9}{90} = \boxed{\frac{1}{90}}$.

Nell'esempio dell'acqua, perché la somma viene 1?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots =$$

$(a_0 = 1)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \overset{S}{=} \frac{1}{1-q} - 1 = \quad \boxed{\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad q = 1/2$$

(Devo togliere a_0) $= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$

la somma S viene 1.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ si chiama $\boxed{\text{SERIE GEOMETRICA}}$.

a) Se $-1<q<1$, la serie converge a $\frac{1}{1-q}=S$

(N.B.: Per $q=0$, c'è la convenzione $0^0=1$:
attenzione! questo NELLE SERIE, perché invece
NEI LIMITI 0^0 è una FORMA INDETERMINATA)

b) Se $q>1$, la serie diverge a $+\infty$, cioè

$$S=\lim_{n\to+\infty}(1+q+q^2+\dots+q^n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=+\infty.$$

c) Se $q=1$, non si può dividere per $1-q$, ma con un'altra tecnica si può vedere che la serie diverge a $+\infty$.

Infatti, la somma parziale n-sima è $\underbrace{1^0+1^1+\dots+1^n}_{n+1 \text{ volte}} =$
$=(n+1)\cdot 1=n+1$, e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty+1=+\infty.$$

d) Se $q\leq -1$, si può vedere che la serie è indeterminata (senza dim.), cioè $\lim_{n\to+\infty} S_n$ non esiste.

Quindi LA SERIE GEOMETRICA $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$
CONVERGE per $-1<q<1$
DIVERGE per $q\geq 1$
È INDETERMINATA per $q\leq -1$

N.B.: q può dipendere da un parametro x ($q=f(x)$), ma $\boxed{\text{MAI DA } n.}$

Esempio: $\boxed{0,\bar{9}=1}$. Che cosa vuol dire $0,\bar{9}=0,999\ldots9\ldots9\ldots$? Infiniti 9?? Vuol dire $\frac{9}{10}$ (1ª cifra) + $\frac{9}{100}$ (2ª cifra) + $\frac{9}{1000}$ (3ª cifra) + ... $= 9\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\right)=9\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}=$

$$=9\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n=9\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n-\left(\frac{1}{10}\right)^0\right]=\Big(-1<q=\frac{1}{10}<1,$$

quindi la serie geometrica $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10}}$ converge ed ha somma

$$\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{\frac{10-1}{10}}=\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{10}{9}\Big)=9\cdot\left(\frac{10}{9}-1\right)=9\cdot\frac{1}{9}=1$$

Quindi viene effettivamente $\boxed{0,\bar{9}=1}$.

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA:

è del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$, con a numero reale fissato [Negli esercizi, molte serie si riconducono a questa]. Questa serie:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{converge, se } a>1\\ \text{diverge, se } a\leq 1\end{array}}$$

In particolare, per $a=1$ si ha la SERIE ARMONICA ("tradizionale") che DIVERGE, anche se $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ (cioè il limite del termine generale a_n è 0). Quindi

$$\boxed{\text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ DIVERGE}}$$

[N.B.: è possibile vedere il comportamento della serie armonica generalizzata con il criterio di condensazione di Cauchy, vedi più avanti...]

Ora presentiamo alcuni risultati fondamentali sulle serie
(v. anche: APPENDICE : SCHEDA DIDATTICA SULLE SERIE)

T1) <u>TEOREMA</u>: Una serie a termini positivi o non negativi (oppure: negativi o non positivi) non è <u>MAI</u> <u>INDETERMINATA</u>, cioè: o <u>CONVERGE</u>, o <u>DIVERGE</u>.

Senza restrizione, vediamo il caso di serie a termini non negativi (gli altri casi sono analoghi). La formula di ricorrenza dice

$$\boxed{S_n = S_{n-1} + a_n} \geq S_{n-1} + 0 \text{ (perché } a_n \geq 0 \text{ per ogni } n \geq 1) =$$

$= S_{n-1}$ per ogni $n \geq 1$ quindi $\boxed{S_n \geq S_{n-1} \quad \forall n > 1}$

(scrivo $n > 1$ perché c'è $n-1$, ed n lo facciamo partire da 1, ma questa è solo una piccola sottigliezza)

Dunque la successione $(S_n)_n$ è non decrescente, quindi

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n = \begin{cases} \text{numero reale } S \\ \text{oppure} \\ +\infty \end{cases}$$

Se viene S, allora la serie converge a S.
Se invece viene $+\infty$, allora la serie diverge a $+\infty$.

T2) Teorema: Se una serie converge (cioè se $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ numero reale), allora

(tesi): $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Non è vero il viceversa: la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, ma $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

T3) Teorema: Una serie NON CAMBIA il suo comportamento se si cambia soltanto un numero finito di termini (mentre in generale in caso di convergenza, la somma S cambia)

Per il comportamento della serie, se n parte da 0, o da 1, o da 2, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, ... è la stessa cosa.

La somma in generale cambia, come è stato visto sulle serie geometriche.
(se la serie converge)

Se una serie non è geometrica e non è armonica generalizzata, si (può) studia(re) il limite del termine generale $\lim_{n\to+\infty} a_n$, che NON È il $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n}$

T4) Teorema: Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ esiste ed è diverso da 0 (quindi anche $+\infty$ oppure $-\infty$), allora la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>DIVERGE.</u>

Infatti non converge, perché, se convergesse, allora si avrebbe $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, assurdo, perché si contraddice l'ipotesi.

Non è indeterminata. Essendo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, per il teorema della PERMANENZA DEL SEGNO, esiste un numero naturale n_0 tale che a_n ha lo stesso segno del limite $\forall n \geq n_0$. Quindi la serie è a termini positivi o a termini negativi tranne che, AL PIÙ, per un numero FINITO di termini. Siccome il comportamento della serie non cambia se alteriamo un numero finito di termini, allora alteriamo i primi $n_0 - 1$ termini in modo tale che <u>TUTTA</u> la serie risulti essere a termini POSITIVI oppure a termini <u>negativi</u>. La serie data ha lo stesso comportamento di una serie a termini positivi (o negativi), che NON È INDETERMINATA.

La serie data: 1) non converge
2) non è indeterminata

e quindi, per esclusione, la serie DIVERGE.

Esempio: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}+4n^7+23}{3n+11+9n^{10}}$

Calcoliamo il limite del termine generale. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{10}+4n^7+23}{3n+11+9n^{10}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^{10}}}{9\cancel{n^{10}}} = \frac{1}{9} \neq 0$$

(Per il principio di sostituzione degli infiniti, "vincono" i termini di grado più grande, sia al numeratore che al denominatore) Quindi la serie data DIVERGE.

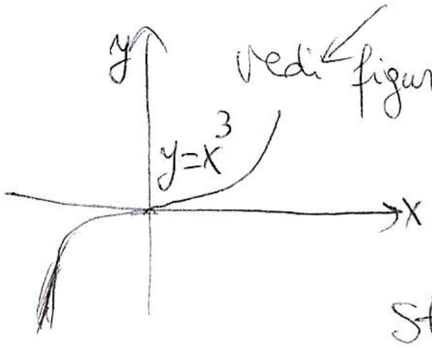
ATTENZIONE! Il $\lim_{n\to+\infty} a_n$ è una cosa MOLTO DIVERSA dal $\lim_{n\to+\infty} S_n$ (limite delle somme parziali) a cui si riferisce il concetto di serie!!!

Esercizio: Studiamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^3}$, $x \in \mathbb{R}$

TRUCCO: Per le proprietà delle potenze, si ha $e^{-nx^3} = (e^{-x^3})^n$, e quindi la nostra serie può essere scritta come $\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x^3})^n$, serie geometrica con $q = e^{-x^3}$, che NON CONTIENE n.

Innanzi tutto, q è sempre positivo (perché è l'esponenziale di qualcosa). Allora, se $q<1$, avremo $0<q<1$, e quindi la convergenza della nostra serie geometrica.

Poniamo $q<1$. Si ha $q<1$ se e solo se $e^{-x^3}<1=e^0$ se e solo se $-x^3<0$ se e solo se $x^3>0$ se e solo se $x>0$. Quindi, per $x>0$,



vedi figura

la serie geometrica <u>converge</u>.
Invece la serie geometrica <u>diverge</u> se e solo se $q\geq 1$.

Studiamo la <u>divergenza</u> e poniamo $q\geq 1$.
Si ha: $q\geq 1$ se e solo se $e^{-x^3}\geq 1=e^0$ se e solo se $-x^3\geq 0$ (la base e è maggiore di 1, quindi la disuguaglianza, considerando solo gli esponenti, NON CAMBIA DI SEGNO) se e solo se $x^3\leq 0$ se e solo se $x\leq 0$.

Quindi la nostra serie $\begin{cases} \text{converge, se e solo se } x>0 \\ \text{diverge, se e solo se } x\leq 0 \end{cases}$

Nello studio di una serie:

1) Vedere se è geometrica o armonica generalizzata
2) Se no, si può studiare il limite del termine generale, cioè $\lim_{n\to+\infty} a_n$: se viene diverso da 0 (anche $+\infty$ o $-\infty$), la serie DIVERGE.
3) Se invece $\lim_{n\to+\infty} a_n$ è uguale a 0, o non esiste, oppure è troppo difficile da calcolare, allora che cosa si fa?

SI PASSA AI CRITERI

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie a termini <u>positivi</u>.

Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n}$ è un numero <u>reale</u> <u>strettamente positivo</u> (quindi diverso da 0 e diverso da ∞) allora le due serie HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO.

Questo criterio è molto utile quando siamo davanti a situazioni in cui si possono applicare i <u>limiti notevoli</u>, riconducendosi molto spesso a <u>serie</u> armoniche generalizzate. In tali casi, si ottiene che studiare il comportamento della serie data è equivalente a studiare il comportamento di una serie armonica generalizzata.

Esempio: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}}$

Si usa il limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Poniamo $x = \frac{1}{n^2}$. Quando n tende a $+\infty$, allora $x = \frac{1}{n^2}$ tende a 0 $\left(\frac{1}{+\infty} = 0\right)$. Si ha:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}} \overset{x=\frac{1}{n^2}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \boxed{1} \begin{matrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{matrix}$$

Prendiamo $a_n = \sin\frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$. Allora la nostra serie si comporta come la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, serie armonica generalizzata con $\boxed{a}=2\boxed{>1}$: la serie converge.

Quindi la serie data $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$ converge.

$$\boxed{\text{LIMITI NOTEVOLI} \longleftrightarrow \text{CONFRONTO ASINTOTICO}}$$

Esercizio: Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n^{1/4}}\right)^3$$

Innanzi tutto, vediamo che la serie non è né geometrica né armonica generalizzata. Facciamo quindi il limite del termine generale, cioè $\lim_{n\to+\infty} a_n$, ove $a_n=\left(1-\cos\frac{1}{n^{1/4}}\right)^3$.

Si ha: $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n^{1/4}}\right)^3=0$, perché quando n tende a $+\infty$, si ha che $\frac{1}{n^{1/4}}$ tende a 0, $\cos\frac{1}{n^{1/4}}$ tende a $1=$ $=\cos 0$ (il coseno è una funzione continua), quindi $1-\cos\frac{1}{n^{1/4}}$ tende a 0, e allora $\left(1-\cos\frac{1}{n^{1/4}}\right)^3$ tende a 0^3, cioè a 0. Essendo dunque $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$, non si può dire nulla.

L'idea è quella di passare ai criteri, e il limite notevole $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}}$ ci fa pensare al criterio del confronto asintotico. Prima di fare ciò, per poterlo applicare, facciamo vedere che la nostra serie data è A TERMINI POSITIVI. Si ha:

$\left(1-\cos\frac{1}{n^{1/4}}\right)^3>0$ se e solo se ($\Longleftrightarrow$) $1-\cos\frac{1}{n^{1/4}}>0$

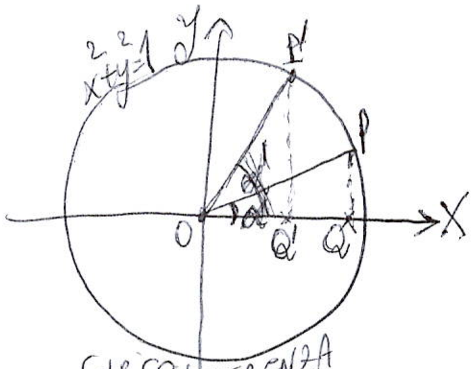
(perché $t^3>0 \Leftrightarrow t>0$) $\Longleftrightarrow 1>\cos\frac{1}{n^{1/4}} \Longleftrightarrow \cos\frac{1}{n^{1/4}}<1$

Dimostriamo quindi che

$(\dagger)$ $\cos \frac{1}{n^{1/4}} < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$:

ciò implicherà che la nostra serie data è a termini POSITIVI. Innanzi tutto, notiamo che

$(\ast)$ $0 < \frac{1}{n^{1/4}} \leq 1 < \frac{\pi}{3}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$



CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

$\alpha = P\hat{O}Q$

$\alpha' = P'\hat{O}Q'$

$OQ' = x' = \cos \alpha'$

$OQ = x = \cos \alpha$

Inoltre, guardando la circonferenza goniometrica, il coseno "corrisponde" alla coordinata x, che nel 1° Quadrante decresce, andando da 1 (per $\alpha = 0$) a 0 (per $\alpha = \frac{\pi}{2}$). In particolare la funzione coseno è strettamente decrescente tra 0 e $\frac{\pi}{3}$. Da ciò e da $(\ast)$ si deduce che

$$1 = \cos 0 > \cos \frac{1}{n^{1/4}} > \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e

in particolare la disuguaglianza $(\dagger)$ è stata dimostrata. Ciò prova che la nostra serie è a termini POSITIVI.

Applichiamo allora il CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO.

La nostra serie è $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (con $a_n = \left(1 - \cos \frac{1}{n^{1/4}}\right)^3$).

Con che cosa confrontiamo a_n? Teniamo presente il limite notevole

$$(\ast)\quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Siccome $\frac{1}{2} > 0$, $\frac{1}{2} \neq 0$, $\frac{1}{2} \neq \infty$, si ha che, quando x tende a 0, $1 - \cos x$ "somiglia" ad x^2, cioè è asintotico ad x^2.

Se al posto di x ci mettiamo $\frac{1}{n^{1/4}}$, allora $\frac{1}{n^{1/4}}$ tende a 0, in quanto n tende a $+\infty$, $n^{1/4}$ tende a $+\infty$, ed $\frac{1}{+\infty} = 0$ (algebra dei limiti). Dunque usiamo il limite in $(\ast)$. Si ha

$$(+)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n^{1/4}}}{\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)^2} = \frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n^{1/4}}}{\frac{1}{n^{1/2}}}.$$

Ma la serie data è $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n^{1/4}}\right)^3$ e non $\sum_{n=1}^{\infty} 1-\cos\frac{1}{n^{1/4}}$

Dunque nel limite in (+) BISOGNA ELEVARE ALLA 3^a, ottenendo $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\cos\frac{1}{n^{1/4}}\right)^3}{\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\cos\frac{1}{n^{1/4}}\right)^3}{\frac{1}{n^{3/2}}}$

per le proprietà delle potenze $\boxed{a^{bc}=(a^b)^c \text{ dove ha senso}}$

Visto che $\frac{1}{8}$ è un valore "buono" (cioè positivo, $\neq 0$, $\neq \infty$) allora la serie data, in virtù del criterio del confronto asintotico, "somiglia" alla serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$, cioè ha lo <u>stesso</u> comportamento della serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$, la quale <u>converge</u> perché $\frac{3}{2}>1$. Dunque, LA SERIE DATA <u>CONVERGE</u>.

Esercizio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^{1/6}}\right)\right)^3}{\left(e^{1/n^{1/4}}-1\right)^2} \cdot e^{-nx^2-n} \quad , x \in \mathbb{R}.$$

Si tratta di una serie a termini positivi. Come si risolve? Intanto, con il criterio del confronto asintotico, stimiamo i termini

$$\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^{1/6}}\right)\right)^3 \quad \text{ed} \quad \left(e^{1/n^{1/4}}-1\right)^2$$

tenendo conto dei limiti notevoli

$$(**) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

La funzione $\ln(1+x)$, quando x tende a 0, è <u>asintotica</u> a x. Se al posto di x ci mettiamo $\frac{1}{n^{1/6}}$, allora, poiché n tende a $+\infty$, si ha che $\frac{1}{n^{1/6}}$ tende a 0.

Applicando il limite notevole $(**)$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^{1/6}}\right)}{\frac{1}{n^{1/6}}} = 1$$

Ma bisogna valutare la quantità $\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^{1/6}}\right)\right)^3$. Quindi si ottiene

$$1 = 1^3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^{1/6}}\right)\right)^3}{\left(\frac{1}{n^{1/6}}\right)^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^{1/6}}\right)\right)^3}{\frac{1}{n^{1/2}}}$$

$$\left[\text{perché } \left(\frac{1}{n^{1/6}}\right)^3 = \frac{1}{(n^{1/6})^3} = \frac{1}{n^{3/6}} = \frac{1}{n^{1/2}}\right]$$

Ma 1 è positivo, $\neq 0$, $\neq \infty$, quindi è un numero "buono"

Quindi effettivamente, per il criterio del confronto asintotico, il pezzo $\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^{1/6}}\right)\right)^3$ può essere sostituito con $\frac{1}{n^{1/2}}$.

Consideriamo ora il limite notevole

(***) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}=1$, e valutiamo la quantità $\left(e^{1/n^{1/4}}-1\right)^2$.

La funzione e^x-1, quando x tende a 0, è <u>asintotica</u> a x. Se al posto di x ci mettiamo $\frac{1}{n^{1/4}}$, allora, poiché n tende a $+\infty$, si ha che $\frac{1}{n^{1/4}}$ tende a 0. Applicando il limite notevole (***), si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1/n^{1/4}}-1}{\frac{1}{n^{1/4}}}=1$$

Ma noi dobbiamo valutare la quantità $\left(e^{1/n^{1/4}}-1\right)^2$, perché è così nel testo dell'esercizio. Si ha

$$1=1^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{n^{1/4}}}-1\right)^2}{\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{n^{1/4}}}-1\right)^2}{\frac{1}{n^{2/4}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{n^{1/4}}}-1\right)^2}{\frac{1}{n^{1/2}}}$$

$a^{bc}=(a^b)^c$, dove ha senso

Poiché 1 è positivo, $1\neq 0$, $1\neq\infty$, allora 1 è "buono", nel senso che possiamo applicare il criterio del confronto asintotico, e "sostituire" il pezzo $\left(e^{1/n^{1/4}}-1\right)^2$ con $\frac{1}{n^{1/2}}$.

Pertanto la serie di partenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^{1/6}}\right)\right)^3}{\left(e^{1/n^{1/4}}-1\right)^2} \cdot e^{-nx^2-n}$$

in virtù del criterio del confronto asintotico, si comporta come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cancel{\frac{\frac{1}{n^{1/2}}}{\frac{1}{n^{1/2}}}}\, e^{-nx^2-n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x^2+1)n} =$$

(trucco: proprietà delle potenze) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-(x^2+1)}\right]^n$ serie geometrica del tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n$,

ove $q = e^{-(x^2+1)}$ NON DIPENDE DA n.

Valutiamo q. Innanzi tutto, osserviamo che $q>0$, essendo l'esponenziale una quantità sempre positiva. Studiamo la convergenza di questa serie geometrica, cioè poniamo $q<1$ (ciò, essendo $q>0$, implicherà $0<q<1$, e quindi la convergenza della serie geometrica). Si ha: $q<1$ se e solo se $e^{-(x^2+1)}<e^0$ se e solo se $-(x^2+1)<0$ se e solo se $x^2+1>0$, che è sempre vero, per ogni numero reale x. Pertanto la nostra serie geometrica <u>converge</u> per tutti gli $x \in \mathbb{R}$. Allora la serie data <u>iniziale</u> si comporta come la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-(x^2+1)}\right]^n$, e quindi <u>converge</u> per ogni $x \in \mathbb{R}$.

CRITERIO DEL CONFRONTO

Il criterio del confronto asintotico è molto utile, in particolare quando siamo davanti a situazioni in cui possiamo applicare i limiti notevoli, ed è molto "veloce". Di solito, si riconduce la serie data ad una serie <u>armonica</u> <u>generalizzata</u>, di cui si conosce il comportamento, e quindi ci sono casi in cui funziona molto bene. Tuttavia, non sempre si può usare: per esempio ci sono casi in cui sono presenti dei logaritmi che possono "dare fastidio". Allora si può ricorrere al <u>CRITERIO DEL CONFRONTO</u>:

Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie a termini non negativi (o positivi). Supponiamo che esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_0$, si ha:

$$\boxed{0 \leq a_n \leq b_n}$$

Allora: Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

ESEMPIO:

Studiare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$

Se volessimo confrontare $\frac{\ln n}{n^{3/2}}$ con $\frac{1}{n^{3/2}}$, con il confronto asintotico si avrebbe

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^{3/2}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\cancel{n^{3/2}}} \cdot \cancel{n^{3/2}} = +\infty$$

che non va bene. Si può vedere che, se prendiamo $\frac{1}{n^a}$ al posto di $\frac{1}{n^{3/2}}$, non va bene lo stesso.

Allora come risolvere l'esercizio? L'idea è considerare che, al tendere di n a $+\infty$, il <u>logaritmo</u> è più <u>debole</u> di <u>tutte</u> le <u>potenze</u> del tipo n^b, con $b>0$ (quindi anche $n^{1/2}, n^{1/3}, \dots$), cioè: se prendiamo n^b, esisterà sicuramente un numero intero positivo abbastanza grande, diciamo $\bar{n}_b$ tale che, "da questo numero in poi, il logaritmo è più piccolo di n^b", cioè $\exists\, \bar{n}_b$ tale che, $\forall n \geq \bar{n}_b$,

$$\boxed{\ln n \leq n^b}$$ DISUGUAGLIANZA MOLTO UTILE

Allora l'idea è: TROVARE $b>0$ IN MODO TALE CHE SIA POSSIBILE APPLICARE IL CRITERIO DEL CONFRONTO.

Dunque: $\frac{\ln n}{n^{3/2}} \leq \frac{n^b}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{3/2} \cdot n^{-b}} = \frac{1}{n^{3/2-b}}$ $(\forall n \geq \bar{n}_b)$

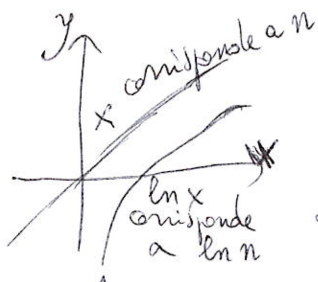
(da $\bar{n}_b$ in poi)

Quindi possiamo dire:
da un certo n in poi, $\dfrac{\ln n}{n^{3/2}} \leq \dfrac{1}{n^{3/2-b}}$

Ci troviamo davanti alla disuguaglianza $\leq$, quindi l'idea per applicare il criterio del confronto è: "se la serie più grande converge, allora la serie più piccola converge."
Ma è possibile trovare questa situazione? Se $\frac{3}{2} - b > 1$, abbiamo risolto, perché siamo davanti a una serie armonica generalizzata <u>convergente</u>. Basta prendere, ad esempio, $b = \frac{1}{4}$: infatti $\frac{3}{2} - b = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{6-1}{4} = \frac{5}{4} > 1$. Quindi, da un certo n in poi, $\boxed{\dfrac{\ln n}{n^{3/2}} \leq \dfrac{1}{n^{5/4}}}$.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$ converge (armonica generalizzata con $a = \frac{5}{4} > 1$) e quindi, per il criterio del confronto, la serie data <u>converge</u>.

Altro esempio: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ L'idea è: $\forall n \geq 2$, $\ln n < n$



Allora, passando ai reciproci, $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$.

La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armonica usuale) DIVERGE.

Applicando il criterio del confronto, da ciò segue che anche la serie data $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ <u>DIVERGE</u>.

Ci sono delle situazioni in cui non conviene usare il criterio del confronto o quello del confronto asintotico. Presentiamo allora i seguenti due criteri (RAPPORTO e RADICE), che sono criteri molto simili (il criterio della radice si usa molto con potenze; il criterio del rapporto, con fattoriali e potenze)

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini <u>positivi</u>, e sia

$$\boxed{l = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}}.$$

<u>TESI</u>: Se $l > 1$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>DIVERGE</u>.
Se $0 \leq l < 1$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>CONVERGE</u>.
Se $\boxed{l = 1}$, oppure l non esiste, oppure l è troppo difficile da calcolare, allora <u>non si può dire nulla</u>.

CRITERIO DELLA RADICE

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini <u>non negativi</u> o <u>positivi</u>, e sia

$$\boxed{L = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to +\infty} a_n^{\frac{1}{n}}}.$$

Allora: (<u>TESI</u>) Se $L > 1$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>DIVERGE</u>.
Se $0 \leq L < 1$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE.
Se $\boxed{L = 1}$, oppure L non esiste, oppure L è troppo difficile da calcolare, allora <u>non si può dire nulla</u>.

Esempio

Con il criterio della radice, studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

(N.B.: Per ora, diamo per buono il limite "quasi notevole" $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$, che dimostreremo tra breve)

<u>SVOLGIMENTO</u>: Si ha: $a_n = \frac{n}{3^n}$, $a_n^{\frac{1}{n}} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{(3^n)^{1/n}} =$

$= \frac{n^{\frac{1}{n}}}{3^{n \cdot 1/n}} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{3}$, da cui $\lim_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{3} = \frac{1}{3} < 1.$

Pertanto, in virtù del criterio della radice, la serie CONVERGE.

CRITERI		SERIE A TERMINI POSITIVI
confronto asintotico	$\longleftrightarrow$	limiti notevoli
confronto	$\longleftrightarrow$	confronto fra infiniti e logaritmi
radice	$\longleftrightarrow$	potenze e potenze di potenze
rapporto	$\longleftrightarrow$	potenze e fattoriali

Adesso studiamo la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ con il criterio del rapporto $a_n = \frac{n}{3^n}$ $a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$

si sostituisce n con $n+1$ IN TUTTO E PER TUTTO. Si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{n+1}{\underbrace{\cancel{3^{n+1}}}_{\cancel{3^n} \cdot 3}} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$l = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0 = \frac{1}{+\infty}}\right) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \quad \boxed{l = \frac{1}{3} < 1}$$

e quindi, per il criterio del rapporto, la serie data CONVERGE.

Esercizio: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$ al variare di $x \in \mathbb{R}$. Suggerimento: Usare il criterio della RADICE (che è più veloce del criterio del rapporto)

NON È UNA SERIE GEOMETRICA (N.B.: $e^{-n^2 x} = (e^{-nx})^n$, ma la quantità dentro parentesi, cioè e^{-nx}, DIPENDE DA n, quindi NON SI TRATTA DI SERIE GEOMETRICA!). La serie è a termini positivi. Si ha:

$$L = \lim_{n \to +\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \left(e^{-n^2 x}\right)^{\frac{1}{n}} = (\text{proprietà delle potenze}) \lim_{n \to +\infty} e^{-\cancel{n^2} \cdot x \cdot \frac{1}{\cancel{n}}} = \lim_{n \to +\infty} e^{-nx} = \frac{1}{\lim_{n \to +\infty} e^{nx}} = (\text{per } x > 0) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Quindi, per $x > 0$, la serie CONVERGE. Per $x < 0$, poniamo $t = -x$: allora $t > 0$, e $L = \lim_{n \to +\infty} e^{-nx} = \lim_{n \to +\infty} e^{nt} = +\infty$, e quindi la serie DIVERGE.

Per $x = 0$, si ha: $e^{-n^2 x} = e^0 = 1$, quindi la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, che DIVERGE.

APPENDICE: Dimostriamo che $l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = \boxed{\lim_{n \to +\infty} n^{1/n} = 1}$. Applicando il trucco $\boxed{f^g = e^{g \ln f}}$, si ha $\boxed{n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \cdot \ln n}}$ $\left(f = n,\ g = \frac{1}{n}\right)$. Ma $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ (il logaritmo è più lento), e quindi $\boxed{l} = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = \boxed{1}$.

Esempio: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x>0}$

sarà la nostra "serie esponenziale"

La serie è a termini positivi, perché $x>0$.

Dato che c'è $n!$, applichiamo il criterio del RAPPORTO.

Si ha: $a_n = \frac{x^n}{n!}$ $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ $\frac{1}{a_n} = \frac{n!}{x^n}$, quindi

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} =$$

$$\underset{\text{(TRUCCO)}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{x^n} \cdot x \cdot \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n}}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n} \cdot (n+1) \cdot \cancel{x^n}} = x \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} =$$

$= x \cdot 0 = 0 < 1$. **Pertanto**, per il criterio del rapporto, la serie data converge.

(N.B.: x è una costante, quindi la posso portare "fuori" dal segno di limite)

Anticipazione: qual è la somma? (n parte da 0...) Viene e^x. Ma lo vedremo con la MATE-MAGICA delle serie di TAYLOR.

ALTRO CRITERIO PER LE SERIE A TERMINI POSITIVI

CRITERIO DI CONDENSAZIONE DI CAUCHY o CRITERIO DELLA SERIE DI CAUCHY

(serve a risolvere serie piuttosto "difficili", che possibilmente non si riescono a studiare con gli altri criteri)

Sia $(a_n)_n$ una successione non crescente (o decrescente) di numeri positivi. Allora le due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ hanno lo stesso comportamento

(N.B.: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + 8 \cdot a_8 + 16 \cdot a_{16} + \ldots$

ove a_2 è il secondo termine della successione $(a_n)_n$,
a_4 è il quarto termine della successione $(a_n)_n$, e così via)

Esempi: A che serve questo criterio?

a) Dimostrare il comportamento della serie armonica generalizzata.

b) Risolvere serie abbastanza "difficili", quali $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$

a) Studiare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ $a \in \mathbb{R}$ $\boxed{a>0}$ (serie ARMONICA GENERALIZZATA)

Poiché la studiamo (senza perdita di generalità) per $a>0$, allora la successione $\frac{1}{n^a}$ è una successione <u>decrescente</u>.

Infatti, sia $a_n = \frac{1}{n^a}$ e poniamo $a_{n+1} < a_n$ (cioè, studiamo la decrescenza della nostra successione). Si ha $a_{n+1} < a_n$ se e solo se $\frac{1}{(n+1)^a} < \frac{1}{n^a}$ se e solo se (passiamo ai reciproci e CAMBIAMO il verso della disuguaglianza) $(n+1)^a > n^a$, che è sempre vero, poiché <u>$a>0$</u>.

Possiamo allora applicare il criterio di condensazione di Cauchy. Essendo $a_n = \frac{1}{n^a}$, si ha $a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^a}$, quindi

$$2^n \cdot a_{2^n} = \frac{2^n}{(2^n)^a} = 2^n \cdot (2^n)^{-a} = (2^n)^1 \cdot (2^n)^{-a} = (2^n)^{1-a} = 2^{n\cdot(1-a)} =$$

$= 2^{(1-a)\cdot n} = (2^{1-a})^n$ Quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ è la serie <u>geometrica</u> $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-a})^n$ con $q = 2^{1-a}$. Notiamo innanzi tutto che $q>0$, perché 2 elevato a una qualsiasi cosa è sempre positivo.

Quindi, se $q<1$, allora la serie geometrica converge (perché, essendo $q>0$, in tal caso si ha $0<q<1$), mentre se $q \geq 1$, allora la serie geometrica diverge. Si ha:

$q<1$ se e solo se $2^{1-a} < 1 = 2^0$ se e solo se $1-a<0$ se e solo se $1<a$ cioè $\boxed{a>1}$ (Convergenza); $q \geq 1$ se e solo se $2^{1-a} \geq 1 = 2^0$ se e solo se $1-a \geq 0$ se e solo se $1 \geq a$ cioè $\boxed{a \leq 1}$ (divergenza), ritrovando il risultato sul comportamento della serie armonica generalizzata.

b) Studiare $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$

Dimostriamo intanto che la successione $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}$ è DECRESCENTE. Poniamo $a_{n+1} < a_n$: questo è vero se e solo se $\frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)} < \frac{1}{n \cdot \ln n}$ se e solo se (passiamo ai reciproci e CAMBIAMO SEGNO) $(n+1) \cdot \ln(n+1) > n \cdot \ln n$ che è sempre vero. Ora, sia $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}$. Chi è $2^n \cdot a_{2^n}$?

Si ha: $2^n \cdot a_{2^n} = \cancel{2^n} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n} \cdot \ln(2^n)} = \frac{1}{n \cdot \ln 2}$ (per le proprietà dei logaritmi) Quindi la serie data $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ si comporta come la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, la quale DIVERGE (N.B.: Una costante può essere portata fuori dal segno di serie, perché la serie è il LIMITE (della successione delle somme parziali), e perché una costante può essere portata fuori dal segno di limite. Stiamo parlando – naturalmente – di costanti MOLTIPLICATIVE)

CRITERI (DI LEIBNITZ) PER SERIE A SEGNI ALTERNI, CIOÈ PER SERIE DEL TIPO

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$$

ove $(b_n)_n$ è una successione di numeri reali <u>positivi</u>.

<u>1° criterio di Leibnitz</u>: Se $(b_n)_n$ è noncrescente (o decrescente) e $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n \quad \underline{\text{CONVERGE}}.$$

<u>2° criterio di Leibnitz</u>: Se $(b_n)_n$ è noncrescente (o decrescente) e $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n \neq 0$, allora la serie

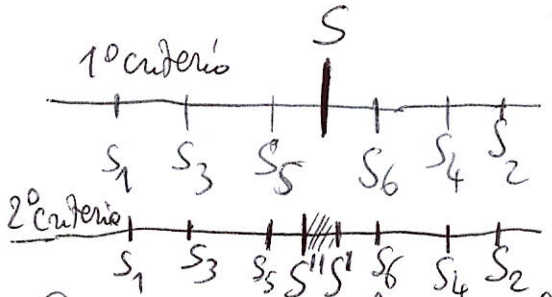
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n \text{ è } \underline{\text{INDETERMINATA}}.$$

<u>3° criterio di Leibnitz</u>: Se $(b_n)_n$ è nondecrescente, allora la serie data è <u>indeterminata</u>.

DISEGNO: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n\right)$

1° e 2° criterio di Leibnitz

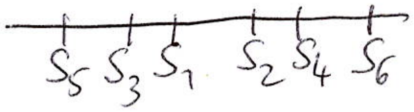
$\boxed{S_1} = -b_1$ $\boxed{S_2} = b_2 - b_1 \boxed{>} -b_1 = \boxed{S_1}$ perché $b_2 > 0$; dunque S_2 sta a <u>destra</u> di S_1. $\boxed{S_3} = -b_1 + b_2 - b_3 \boxed{<} -b_1 + b_2 = \boxed{S_2}$ perché $b_3 > 0$, $-b_3 < 0$; quindi S_3 sta a sinistra di S_2. Inoltre S_3 sta a destra di S_1: infatti si ha $S_3 = -b_1 + b_2 - b_3 \geqslant -b_1 + 0$ (perché $b_2 - b_3 \geqslant 0$, dato che $b_2 \geq b_3$, in quanto $(b_n)_n$ è NON-CRESCENTE (o decrescente)). Similmente si vede che S_4 sta a destra di S_3 e a sin. di S_2.



Dunque, si può vedere che le somme S_n di posto dispari e quelle di posto pari si "avvicinano".

Si può vedere che, se $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, allora $\lim_{k\to+\infty} S_{2k} = \lim_{k\to+\infty} S_{2k+1} = S$ (numero reale), e quindi $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, cioè la serie data converge ad S; mentre se $\lim_{n\to+\infty} b_n \neq 0$, allora (si può vedere che) $S' = \lim_{k\to+\infty} S_{2k} \neq \lim_{k\to+\infty} S_{2k+1} = S''$, quindi $\lim_{n\to+\infty} S_n$ non esiste, (perché ci sono 2 restrizioni con 2 limiti diversi) quindi la serie data è <u>INDETERMINATA.</u>

Veniamo ora al <u>disegno</u> del <u>3°</u> criterio di Leibnitz.



Ricordiamo che la nostra serie è $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, ove $(b_n)_n$ è una successione <u>non-decrescente</u> (o <u>crescente</u>) di numeri positivi. Si ha $S_1 = -b_1$, $\boxed{S_2} = b_2 - b_1 \boxed{\geq} 0 - b_1 = -b_1 = \boxed{S_1}$ perché $b_2 > 0$, e quindi $S_2 > S_1$, cioè S_2 sta a <u>destra</u> di S_1. Inoltre, S_3 sta a <u>sinistra</u> di S_1: infatti $S_3 = -b_1 + b_2 - b_3 \leq -b_1 + 0 = S_1$, perché $b_2 - b_3 \leq 0$, dato che $b_2 \leq b_3$ (e questo è vero perché $(b_n)_n$ è <u>non-decrescente</u>). Analogamente, S_4 sta a destra di S_2: infatti $S_4 = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 \geq -b_1 + b_2 + 0 = S_2$, dato che $-b_3 + b_4 \geq 0$, in quanto $b_4 \geq b_3$, poiché $(b_n)_n$ è non-decrescente. E così via: S_5 sta a <u>sinistra</u> di S_3, S_6 sta a <u>destra</u> di S_4, eccetera. I termini S_n di indice pari e quelli di indice dispari si allontanano gli uni dagli altri, e quindi (come si può vedere intuitivamente) $\lim_{k\to+\infty} S_{2k} \neq \lim_{k\to+\infty} S_{2k+1}$. Dunque, procedendo come prima, si conclude che la serie data è INDETERMINATA.

Def.: Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è <u>assolutamente convergente</u> se la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

N.B.: Risultato: Una serie assolutamente convergente è convergente (senza dimostrazione)

Non è vero il viceversa, come vedremo tra poche pagine.

Esempio: Studiamo in valore assoluto la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ nel caso } \boxed{x<0.} \text{ Poniamo } t=-x$$

Allora è $x=-t$, e inoltre $|x|=-x=t$, e $\boxed{t>0}$.

Abbiamo già visto che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ <u>converge</u>, applicando il criterio del rapporto. Quindi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ per $x<0$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE, e quindi CONVERGE.

Per $x=0$ viene $\frac{0^0}{0!} + \frac{0^1}{1!} + \dots + 0 + 0 + \dots$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1} \qquad \frac{0^0}{0!} = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$$

0^0, nelle <u>serie</u>, lo poniamo per convenzione uguale a 1, mentre nei limiti è una forma indeterminata

<u>Convenzione:</u> Nelle serie, $0^0 = 1$; nei limiti 0^0 è una forma indeterminata.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$ serie che converge a 1.

$\boxed{N.B.: 0! = 1}$ (convenzione).

Se si partiva da 1, la serie convergeva a 0.

Se una serie converge, <u>non è detto</u> che converge <u>assolutamente</u>

1) Esercizio $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ $\qquad b_n = \frac{1}{n}$

$b_n > 0 \ \forall n \qquad \lim_{n \to +\infty} b_n = 0$ Quindi, per il 1° criterio di Leibnitz, converge.

La serie dei valori assoluti è

$\sum_{n=1}^{\infty} |-1|^n \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ <u>DIVERGE</u>

e quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ <u>converge</u>, ma <u>non</u> assolutamente.

2) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln n}$ $\qquad b_n = \frac{1}{\ln n}$

$\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{+\infty} = 0.$

Quindi la serie <u>converge</u> per il 1° criterio di Leibnitz.

La serie dei valori assoluti è $\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{|(-1)^n|}_{1} \cdot \frac{1}{\ln n}$

$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ che diverge, perché

$\ln n < n$ $\quad \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

diverge, e $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ diverge, per il criterio

del CONFRONTO Quindi anche

la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln n}$ converge, ma NON

ASSOLUTAMENTE (= converge semplicemente)

Esercizio: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \cdot (-1)^n$

Ancora Leibnitz $\quad b_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

Intanto $(b_n)_n$ DECRESCE, perché $\frac{1}{n}$ decresce.

$\lim_{n \to +\infty} b_n = 1$. Quindi, per il 2° criterio di

Leibnitz, la serie è indeterminata.

<u>ESERCIZIO</u>: Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Non è una serie geometrica, non è una serie armonica generalizzata, (è una serie a termini positivi).
Facciamo il limite del termine generale $\lim_{n\to+\infty} a_n$, dove $a_n = 1+\frac{1}{n}$. Allora $\lim_{n\to+\infty} = \left(1+\frac{1}{+\infty}\right) = 1+0 = 1 \neq 0$, e quindi la serie data <u>DIVERGE</u>.

<u>N.B.</u>: Allo stesso risultato si arriva se si applica il <u>criterio del confronto</u>. Notiamo che, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $\boxed{1+\frac{1}{n}>1}$, e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+\dots+1+1+\dots$ DIVERGE (lo si può vedere come serie il cui limite del termine generale è (naturalmente) 1, oppure come serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ in cui $q=1$, che <u>diverge</u>).
Da ciò e dal criterio del confronto segue che la serie data $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ <u>DIVERGE</u>.

<u>N.B.</u>: Vedi ora gli <u>esercizi</u> sulle serie ("eserciziario di ispirazione"), in particolare l'esercizio da p. 32 a pag. 35 dell'"eserciziario"

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\cdot x^n \qquad \underline{(x\in\mathbb{R})}.$$

SERIE SCHEDA DIDATTICA (INIZIO)

1) Vedere se è **GEOMETRICA** oppure ARMONICA GENERALIZZATA.

1a) $\boxed{\text{Geometrica}}$: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

Converge se $-1 < q < 1$

diverge se $q \geq 1$

è indeterminata se $q \leq -1$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge, allora $\sum_{n=k}^{\infty} q^n$ converge $\forall k \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$: la somma è: $S = \dfrac{1}{1-q}$ (SE CONVERGE)

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$: la somma è: $S = \dfrac{1}{1-q} - q^0 = \dfrac{1}{1-q} - 1$

$\sum_{n=2}^{\infty} q^n$: la somma è: $S = \dfrac{1}{1-q} - q^0 - q = \dfrac{1}{1-q} - 1 - q$

e così via

1b) $\boxed{\text{Armonica generalizzata}}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^a}$

Converge, se $a > 1$

diverge, se $a \leq 1$

SERIE SCHEDA DIDATTICA

2) Studiare il limite del termine generale

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n}$$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ (anche $+\infty$ oppure $-\infty$), allora la serie DIVERGE.

Se invece $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, oppure non esiste in $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, oppure è troppo difficile da calcolare, allora non si può dire nulla.

<u>ATTENZIONE!</u> $\lim_{n\to+\infty} a_n$ <u>non è</u> $\lim_{n\to+\infty} S_n$

$\lim_{n\to+\infty} S_n$ indica il comportamento della serie!

Se $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ è reale, allora la serie converge ad S

Se $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ oppure $-\infty$, allora la serie diverge a $+\infty$ oppure a $-\infty$

Se $\lim_{n\to+\infty} S_n$ non esiste, allora la serie è indeterminata oppure oscillante

Se una serie converge, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ ma non viceversa (esempio: serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$)

Una serie <u>non cambia</u> il suo <u>comportamento</u> se si cambia solo un numero finito di termini (in caso di convergenza, la <u>somma</u> può cambiare)

SERIE SCHEDA DIDATTICA

3) Se non si riesce a risolvere la serie data con i metodi delle pagine precedenti (-1- e -2-) e la serie data è a termini <u>POSITIVI</u>, allora si passa ai <u>criteri</u>

3a) Criterio del rapporto (p.es. con potenze, frazioni fattoriali);

3b) Criterio della radice (p.es. con potenze di potenze ....)

3c) Criterio del confronto asintotico (p.es. se si richiamano <u>limiti</u> notevoli)

3d) criterio del confronto (p.es. se c'è qualche situazione simile a quella dei limiti notevoli, ma è presente qualche logaritmo che rende impossibile applicare direttamente il criterio del confronto asintotico)

3e) criterio di condensazione di Cauchy (p.es. in casi particolarmente "difficili", come ad esempio $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$)

<u>N.B.</u>: Una serie a termini non negativi (o non positivi) non è <u>mai</u> indeterminata, cioè:
O CONVERGE, OPPURE DIVERGE

CRITERIO DEL RAPPORTO
(per serie a termini positivi)

Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>diverge</u>.

Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>converge</u>.

Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, allora non si può dire nulla, e occorre cambiare criterio.

CRITERIO DELLA RADICE (per serie a termini non negativi)

Sia $l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to +\infty} a_n^{\frac{1}{n}}$ (ammesso che esista)

Se $l > 1$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Se $l < 1$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Se $l = 1$, allora non si può dire nulla, e occorre cambiare criterio.

Naturalmente, in questi due criteri, se l non esiste, oppure è troppo difficile da calcolare, occorre cambiare criterio

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

(per serie a termini positivi)

Se due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sono tali che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ è un numero reale positivo ($\neq 0$), allora le due serie hanno lo stesso comportamento

CRITERIO DEL CONFRONTO

(per serie a termini non negativi)

Siano date due successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ tali che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{per ogni } n \geq n_0 .$$

Allora:

C1) Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

C2) Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

CRITERIO DI CONDENSAZIONE DI CAUCHY

Sia $(a_n)_n$ una successione non crescente di numeri positivi. Allora le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $2^n \sum_{n=1}^{\infty} a_{2^n}$ hanno lo stesso comportamento.

SERIE SCHEDA DIDATTICA

Per le serie a segni alterni, si può utilizzare il fatto che, se una serie è assolutamente convergente, allora è convergente (ma non è vero il viceversa), e comunque ci sono i tre criteri di Leibnitz:

Sia $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot b_n$ una serie, ove $(b_n)_n$ è una successione di numeri reali positivi.

L1) Se $(b_n)_n$ è non crescente e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, allora la serie $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot b_n}$ converge.

L2) Se $(b_n)_n$ è non crescente e $\lim_{n\to+\infty} b_n \neq 0$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot b_n$ è indeterminata.

L3) Se $(b_n)_n$ è non decrescente, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot b_n$ è indeterminata.